



UM MODELO DE FLUXO PARA O ELECTRIC TRAVELING SALESMAN PROBLEM

LUÍS GOUVEIA · MARIO RUTHMAIR · DANIEL SANTOS

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um modelo de fluxo, assim como alguns resultados computacionais, para o *Electric Traveling Salesman Problem*, que é uma generalização do clássico *Traveling Salesman Problem* em que o veículo utilizado tem um motor eléctrico. Assume-se que o nível máximo de energia na bateria do veículo eléctrico pode tornar a rota dada pelo problema clássico não admissível. O *Electric Traveling Salesman Problem* é definido num grafo com um depósito e um conjunto de clientes. Cada cliente tem uma procura positiva e cada arco tem um custo de utilização. Além disso, cada arco tem também dois outros valores associados: o consumo de energia por utilização desse arco e o consumo extra de energia por unidade de carga transportada. O objectivo é determinar uma rota que comece e termine no depósito com custo total mínimo garantindo que toda a procura dos clientes é satisfeita (versão *pick-up*) e que o nível de energia do veículo se mantém dentro dos seus limites. Por fim é apresentado um algoritmo de planos de corte com base em desigualdades válidas para o *Traveling Salesman Problem* e alguns resultados computacionais.

1. INTRODUÇÃO

Recentemente o uso de veículos eléctricos por parte de empresas que possuem frotas de veículos tem vindo a aumentar. Um veículo eléctrico exhibe um comportamento distinto de um veículo usual já que a sua autonomia é bastante limitada e a recarga da sua bateria é um processo bastante demorado, contudo os veículos eléctricos não são tão prejudiciais para o ambiente além de serem mais económicos.

A introdução de veículos eléctricos conduz ainda a um outro aspeto a considerar relativamente à topologia da rede de estradas e clientes subjacente ao problema: uma rua a subir implica um

maior consumo de energia por parte de um veículo elétrico, enquanto que uma rua a descer pode até permitir recuperação de energia.

O *Electric Traveling Salesman Problem* (ETSP) é então uma variante do *Traveling Salesman Problem* (TSP) [1] [2] em que são considerados veículos com motor elétrico. Apesar do TSP se poder formular apenas com variáveis associadas aos arcos utilizados na rota para o veículo, no ETSP isso não é suficiente e, desta forma, é necessário considerar não só variáveis que representem a carga do veículo mas também variáveis que representem o nível de energia do veículo. A informação associada à carga e à energia pode ser modelada através de modelos de fluxo adequados em que o sistema de fluxo de energia depende do sistema de fluxo de carga.

O tipo de trabalho realizado até à data sobre o ETSP baseia-se na sua resolução por métodos heurísticos [3] [4].

Neste trabalho introduz-se, na segunda secção, um modelo de fluxos para o ETSP além de, obviamente, conceitos e notações subjacentes ao ETSP. De seguida, numa terceira secção, é apresentado um conjunto de desigualdades válidas utilizadas para o TSP e que são também válidas para o ETSP, e alguns resultados computacionais. Por fim, numa última secção, são tiradas algumas conclusões e é referido o tipo de trabalho futuro que há ainda a realizar.

2. FORMULAÇÕES

2.1 INFORMAÇÃO GERAL

O ETSP é definido num grafo $G = (V, A)$ onde $V = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto de vértices (o vértice 1 representa o depósito) e A é o conjunto de todos os arcos existentes que conectam os vértices de V . O conjunto $V_c = V \setminus \{1\}$ representa o conjunto de clientes, e cada cliente tem uma procura estritamente positiva q_i associada. Para simplificar as formulações assume-se que $q_1 = 0$. Seja ainda Q a soma de toda a procura no conjunto V . A cada arco $(i, j) \in A$ associamos um custo c_{ij} . Consideram-se que os custos são simétricos, isto é, $c_{ij} = c_{ji}$ qualquer que seja o arco $(i, j) \in A$.

Até este ponto o ETSP não difere do clássico TSP. Contudo, no ETSP associam-se mais dois valores a cada arco. Seja α_{ij} o consumo de energia pela utilização do arco (i, j) , independentemente da carga do veículo, e seja β_{ij} o consumo de energia adicional por cada unidade de carga no arco (i, j) . Ambos estes valores podem ser negativos e, nesse caso, o “consumo” de energia é de facto um ganho de energia. Esta situação pode ocorrer em estradas de inclinação negativa, por exemplo.

Dada a carga actual l do veículo no arco (i, j) , seja $E_{ij}(l)$ a função real que determina a energia total consumida pelo veículo nesse arco. Esta definição permite que qualquer função seja utilizada inclusivé funções não lineares todavia, se se pretender utilizar um modelo linear,

é necessário ou discretizar esta função ou utilizar uma boa aproximação linear. Neste estudo vamos assumir que a função é linear: $E_{ij}(l) = \alpha_{ij} + l \times \beta_{ij}$, ou seja, a energia consumida por um veículo com carga l no arco (i, j) é a soma do consumo energético fixo com o consumo energético dependente da carga. Esta definição é mais realista do que a utilizada em [3] e [4], já que um veículo eléctrico consome mais energia caso a sua carga seja máxima do que se estiver vazio.

Para os modelos que serão apresentados considera-se que o problema é de *pick-up*, isto é, o veículo começa vazio e vai recolhendo a procura em cada cliente. Enquanto que para o problema clássico do TSP as variantes de *delivery* e de *pick-up* são equivalentes em termos de conjunto de soluções admissíveis, para o ETSP isso é falso. Pode dar-se o caso que uma solução seja admissível na variante de *pick-up* mas não o seja na variante de *delivery* e vice-versa. Para se perceber melhor a razão desta diferença, considere-se o exemplo da Figura 1. Os números em cima dos vértices são a procura ao passo que os números em cima dos arcos são os valores de β . Assume-se que $\alpha_{ij} = 0$ para todos os arcos.

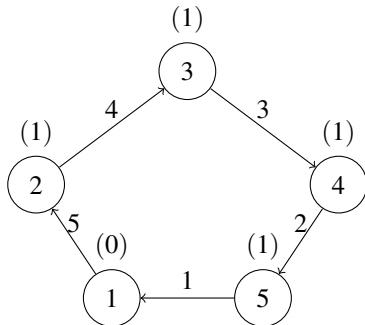


FIGURA 1.
As variantes de *pick-up* e de *delivery* são diferentes no ETSP.

Se a rota for feita numa variante de *pick-up* então a energia total gasta será de $0 \times 5 + 1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = 20$. Se a mesma rota for feita numa variante de *delivery* (o veículo começa com carga 4) então a energia total gasta será agora de $4 \times 5 + 3 \times 4 + 2 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 40$. Assim, se a capacidade máxima da bateria do veículo eléctrico for 30, esta rota não é admissível para variante de *delivery* mas é admissível para a variante de *pick-up*.

Por fim, é óbvio que uma rota admissível para o TSP pode não ser admissível com respeito ao consumo de energia pelo que o conjunto de soluções admissíveis do ETSP está estritamente contido no conjunto de soluções admissíveis do TSP, a menos que a capacidade máxima da bateria seja suficientemente elevada para que qualquer rota seja admissível em termos energéticos.

O estudo do ETSP é interessante na medida em que se procura saber como é que o valor da solução óptima varia com a capacidade máxima da bateria, além de que o ETSP é um problema em que um modelo de fluxos contém dois fluxos em que um depende do outro. Existem vários resultados teóricos para o sistema de fluxos de carga mas que não se aplicam ao sistema de fluxos de energia devido a este depender do primeiro. É assim interessante também perceber se existe a possibilidade de resolver o ETSP com recurso apenas a técnicas desenvolvidas para o TSP.

2.2 OBJECTIVO DO ETSP

Assume-se que o veículo tem uma capacidade máxima de bateria de B . O objectivo do ETSP consiste, então, em determinar uma rota de custo total mínimo que satisfaça:

- A rota começa a termina no depósito;
- Cada cliente é visitado uma e uma só vez;
- O nível de energia do veículo mantém-se no intervalo $[0, B]$.

Assume-se também que o veículo sai do depósito com a bateria no seu nível máximo.

2.3 MODELO BASE AGREGADO COM ARCOS DE INCLINAÇÃO POSITIVA APENAS

Para modelar o ETSP considerem-se três conjuntos de variáveis. Seja x_{ij} uma variável binária que toma o valor 1 se o arco $(i, j) \in A$ faz parte da solução e 0 caso contrário. Seja também y_{ij} uma variável não negativa que indica o fluxo total de carga com o qual o veículo atravessa o arco $(i, j) \in A$. Por fim, seja e_{ij} uma variável não negativa que representa o nível de energia do veículo à saída do vértice i e com destino ao vértice j . Note-se que estamos a assumir que todos os valores de α e β são não negativos.

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a : \sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ji} = 1 \quad \forall j \in V \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V} y_{ij} = -q_j + \sum_{i \in V} y_{ji} \quad \forall j \in V_c \quad (3)$$

$$q_i x_{ij} \leq y_{ij} \leq (Q - q_j) x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (4)$$

$$\sum_{i \in V} e_{1i} = B \quad (5)$$

$$\sum_{i \in V} e_{i1} \geq \sum_{i \in V} (\alpha_{i1} x_{i1} + \beta_{i1} y_{i1}) \quad (6)$$

$$\sum_{i \in V} e_{ji} = \sum_{i \in V} [e_{ij} - (\alpha_{ij} x_{ij} + \beta_{ij} y_{ij})] \quad \forall j \in V_c \quad (7)$$

$$e_{ij} \leq B x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (8)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (9)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (10)$$

$$e_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A \quad (11)$$

O objectivo é minimizar a soma pesada das variáveis x , associadas aos arcos na solução óptima, com pesos iguais aos respectivos custos, ou seja, pretende-se minimizar o custo total dos arcos utilizados para formar a rota.

As restrições (1) - (4) + (9) - (10) modelam o problema clássico do TSP e, portanto, serão com certeza mais familiares. As restrições (1) e (2) garantem que existe um e apenas um arco que sai e um e apenas um arco que entra em cada cliente e no depósito, respectivamente. As restrições (4) relacionam as variáveis x com o fluxo de carga e dizem que o fluxo de carga num arco (i, j) não pode ser superior a $Q - q_j$ (pois o nodo j ainda não foi visitado e, portanto, a sua procura ainda não faz parte da carga do veículo) nem inferior a q_i (pois o veículo ainda agora visitou o vértice i) caso o arco seja utilizado. Caso o arco não seja utilizado então o fluxo de carga tem de ser obrigatoriamente nulo. As restrições (3) são as restrições de conservação de fluxo de carga que, juntamente com (4), permitem garantir a conexidade da rota. Por fim as restrições (9) e (10) são as usuais restrições de domínio.

As restrições (5) - (8) + (11) são específicas do ETSP e modelam o fluxo de energia. Antes de se proceder à sua explicação, é necessário entender como é que as variáveis e se relacionam com as restantes. Recorde-se a definição da função de consumo de energia $E_{ij}(l) = \alpha_{ij} + l \times \beta_{ij}$. As variáveis x representam os arcos seleccionados e as y o fluxo de carga portanto o total de energia gasto ao atravessar o arco (i, j) pode ser representado por $\alpha_{ij} x_{ij} + \beta_{ij} y_{ij}$. De facto, se o arco (i, j) não for utilizado, esta expressão é igual a zero - devido às restrições (4) - enquanto que se o arco é utilizado então a expressão é igual à função de consumo de energia definida, isto é, $\alpha_{ij} + \beta_{ij} y_{ij}$ com $y_{ij} = l$.

As restrições (8) relacionam as variáveis x e e . Estas garantem que o nível de energia do veículo à saída de cada vértice i por um arco (i, j) não pode ser maior do que B . Caso o arco (i, j) não seja utilizado então o nível de energia é nulo.

A restrição (5) diz que a soma do fluxo de energia que sai do depósito tem de ser exactamente B . Se consideramos as restrições (2) com respeito ao depósito sabemos que apenas um arco sai do depósito e, combinando esta informação com as restrições (8) para os arcos que saem do depósito, garantimos que no máximo uma variável de energia será positiva. Assim, a restrição (5) pode ser interpretada como dizendo que exactamente uma variável de energia será positiva e com valor B , isto é, o veículo tem de sair do depósito com nível de energia B .

A restrição (6) assegura que o fluxo de energia do veículo quando volta para o depósito é suficiente para efectuar essa última parte da rota. De facto, como apenas temos um arco a sair de cada vértice, e por causa das restrições (4) e (8), sabemos que no lado esquerdo da restrição apenas uma variável será positiva e, do lado direito da restrição, apenas as variáveis x e y correspondentes serão positivas. Assim, o que a restrição (6) garante, efectivamente, é que o fluxo de energia no arco escolhido para voltar ao depósito tem de ser pelo menos igual ao consumo de energia nesse arco.

As restrições (7) são as restrições de conservação de fluxo para o fluxo de energia. Estas garantem que a energia com a qual partimos de um vértice é igual à energia com a qual chegámos a esse vértice menos a que foi gasta no arco para aí chegar. Como se estão a considerar apenas valores de α e β não negativos, sabe-se que a energia estará sempre a diminuir. Se estes valores pudessem ser negativos então estas restrições podiam levar a que se atingissem valores de energia superiores a B o que não é admissível. Mais à frente explicar-se-á como resolver esta situação.

Por fim, as restrições (11) garantem que o domínio das variáveis e é respeitado.

Para concluir, faça-se uma observação. Como o modelo apresentado inclui uma formulação para o TSP no sistema de variáveis x e y então é claro que qualquer desigualdade válida para o TSP é necessariamente válida para o ETSP.

2.4 MODELO BASE AGREGADO COM ARCOS DE INCLINAÇÃO POSITIVA E NEGATIVA

À partida não parece óbvia a razão de ser necessário um modelo distinto do anterior para esta situação. Para se entender porque é que o modelo anterior não é válido observe-se a Figura 2.

Assuma-se que o valor máximo de energia é $B = 10$. De acordo com a figura o veículo sai do vértice i dirigindo-se para o vértice j com um fluxo de energia de 8. Como $\beta_{ij} = 0$ então a carga actual do veículo é irrelevante mas como $\alpha_{ij} = -5$ sabe-se que o veículo poderá recuperar

até 5 unidades de energia ao usar este arco. De acordo com o modelo anterior (restrições (7)) isto significaria que e_{jk} tomaria o valor $13 > 10$ que não é admissível pois $B = 10$. Esta figura permite assim concluir que as restrições (7) não são válidas já que, de facto, o valor correcto seria $e_{jk} = 10$.

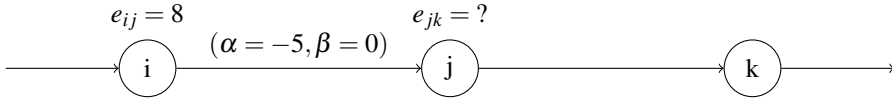


FIGURA 2.

Um exemplo com arcos de inclinação negativa.

Quando estamos perante um caso em que existem valores de α e/ou β negativos, as restrições (7) terão de ser substituídas por (7*), ficando assim o modelo válido.

$$\sum_{i \in V} e_{ji} = \min\{B, \sum_{i \in V} [e_{ij} - (\alpha_{ij}x_{ij} + \beta_{ij}y_{ij})]\} \quad \forall j \in V_c \quad (7^*)$$

Claramente esta abordagem é não linear. Contudo, como $\sum_{i \in V} e_{ji} \leq B$ é implicado por (1) - (2) + (8), pode-se utilizar a seguinte abordagem linear válida:

$$\sum_{i \in V} e_{ji} \leq \sum_{i \in V} [e_{ij} - (\alpha_{ij}x_{ij} + \beta_{ij}y_{ij})] \quad \forall j \in V_c \quad (7^{**})$$

As restrições (7**) permitem de facto definir o conjunto de todas as rotas admissíveis todavia criam um problema no modelo. Esta abordagem linear não é a mais correcta em termos do fluxo de energia no sentido em que qualquer solução admissível para o ETSP proveniente deste modelo tem um número infinito de valores de fluxo de energia válidos apesar de se se saber que apenas um desses será realmente o correcto. Para se entender melhor este problema, tome-se agora atenção à Figura 3.

Os valores acima dos vértices são as procuras e os pares ordenados sobre os arcos são os valores de α e β respectivamente. Com alguns cálculos chega-se à conclusão que o total de energia gasta nesta rota é de 5 (com recuperação de energia pelo meio). Assim o veículo termina a rota com $B - 5$ de energia. Considere-se novamente $B = 10$. É fácil de ver que $e_{12} = 10$, $e_{23} = 7$ e $e_{31} = 9$. Estes valores satisfazem as restrições (7**), como se pode verificar, no entanto também as satisfazem os valores $e_{12} = 10$, $e_{23} = 5$ e $e_{31} = 4$.

Com este exemplo pode-se verificar que apesar das restrições (7**) serem válidas estas não garantem que os valores de energia serão os correctos, ou seja, existem múltiplas soluções

óptimas que diferem apenas nos valores de fluxo de energia. Existem contudo formas de contornar este problema, como explicado em [5], sendo que a ideia é que os valores de fluxo de energia devem ser o máximo possível podendo isso, por exemplo, ser feito posteriormente à resolução do ETSP fixando as variáveis x e y e maximizando a soma das variáveis e . Apesar disso, como foi dito, o modelo é válido e as rotas obtidas são sempre admissíveis, incluindo em termos energéticos.

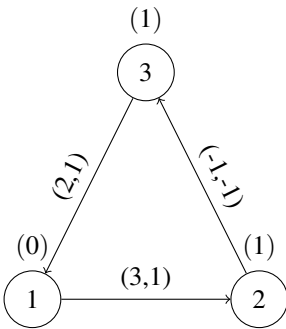


FIGURA 3.
O problema com a abordagem linear considerada.

3. PLANOS DE CORTE E RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Esta secção tem como objectivo apresentar alguns resultados computacionais preliminares para o ETSP com base em desigualdades válidas conhecidas para o TSP. É importante relembrar uma observação feita anteriormente: qualquer desigualdade válida para o TSP é também válida para o ETSP pois o modelo para o último inclui um modelo para o primeiro.

3.1 CORTES DE CONEXIDADE

Sabe-se que a formulação natural para o TSP envolve apenas as variáveis x . Para modelar a conectividade da rota, não é necessária a utilização das variáveis de fluxo y e apesar de estas serem usadas em modelos que se querem compactos, já que a formulação natural para o TSP tem um número exponencial de restrições. A conectividade da rota pode, por exemplo, ser modelada com recurso aos Cortes de Conexidade (CCs). Seja $S' = V \setminus S$:

$$\sum_{i \in S', j \in S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subseteq V_c \quad (\text{CCs})$$

Como se pode verificar, este conjunto de desigualdades válidas é em número exponencial pelo que a sua utilização terá de ser feita com recurso a um algoritmo de planos de corte. Desta forma, foi implementado um algoritmo de separação de CCs que foi inserido num processo

de *branch-and-cut*. Como o consumo de energia depende da carga do veículo, os modelos apresentados para o ETSP têm incluído um sistema de fluxo de carga, que foi modelado com as variáveis y . Este sistema de fluxo já garante a conectividade da rota pelo que os CCs servirão apenas para melhorar os limites inferiores dados pelas relaxações lineares em cada nodo da árvore de pesquisa. Assim, a separação de CCs apenas faz sentido para soluções fraccionárias, já que a admissibilidade da rota em termos de conectividade já é assegurada.

3.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Os resultados desta secção foram obtidos com uso do *software* CPLEX 12.6.1 e a sua *Concert Technology* para C++. Como *hardware* foi utilizado um processador de 3.6GHz com um único *thread* a funcionar. Foi utilizada uma instância com as seguintes características:

- grafo completo com 20 vértices;
- procura no conjunto $\{1, \dots, 5\}$;
- custos euclidianos e simétricos no conjunto $\{20, \dots, 400\}$;
- valores de α com simetria invertida no conjunto $\{-3, \dots, 21\}$;
- valores de β no conjunto $\{-1, 0, 1\}$ directamente dependentes do sinal de α ;
- no caso em que se pretendem apenas valores positivos de consumo de energia, soma-se 4 a cada valor de α e todos os valores β são 1.

Em termos de modelos testados, além do modelo base agregado sem quaisquer cortes, foram testados o modelo base agregado com o algoritmo de planos de corte base do CPLEX e o modelo base agregado com um algoritmo de planos de corte baseado nos CCs, como dito anteriormente.

Na tabelas que se seguem são usadas três nomenclaturas distintas:

- **S/C**: Modelo base agregado sem cortes;
- **CC**: Modelo base agregado com CCs;
- **CCP**: Modelo base agregado com cortes do CPLEX.

A principal conclusão que se pode retirar destes resultados computacionais é que o valor de B influencia a resolução do problema na medida em que a sua diminuição leva a um aumento do valor do *gap* da relaxação linear. O que se verificou é que o valor da solução óptima aumenta à

medida que B diminui, como seria de esperar, mas o valor da relaxação linear não consegue acompanhar este aumento. Isto é válido para qualquer método de resolução apresentado. Os resultados considerando arcos de inclinação positiva apenas levam às mesmas conclusões do que os resultados considerando arcos de inclinação positiva e negativa.

TABELA 1.

Resultados computacionais - inclinação positiva.

| <i>gap da relaxação linear (%)</i> | | | | |
|------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| B | S/C | CC | CCP | CC/CCP |
| 800 | 3.64 % | 0.00 % | 0.07 % | 0.00 % |
| 700 | 3.91 % | 0.28 % | 0.34 % | 0.28 % |
| 600 | 6.28 % | 2.73 % | 2.82 % | 2.73 % |
| Tempo até optimalidade (s) | | | | |
| 800 | 10 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 700 | 10.1 | 7.3 | 0.9 | 6.3 |
| 600 | 147.4 | 385.2 | 356.3 | 59.4 |

TABELA 2.

Resultados computacionais - inclinação positiva e negativa.

| <i>gap da relaxação linear (%)</i> | | | | |
|------------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| B | S/C | CC | CCP | CC/CCP |
| 150 | 4.02 % | 0.42 % | 0.50 % | 0.42 % |
| 100 | 4.10 % | 0.55 % | 0.63 % | 0.55 % |
| 50 | 5.70 % | 2.41 % | 1.80 % | 1.80 % |
| Tempo até optimalidade (s) | | | | |
| 150 | 5.6 | 4 | 0.8 | 2.8 |
| 100 | 6.3 | 2.5 | 0.8 | 3.7 |
| 50 | 10 | 22.4 | 6.3 | 15.6 |

4. CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO

Neste trabalho foi definido o ETSP em que a função de consumo de energia utilizada depende não só do arco utilizado mas também da carga do veículo ao utilizar esse arco. Isto leva a que o modelo de fluxo apresentado contenha um sistema de fluxo de energia dependente de um sistema de fluxo de carga. O ETSP tem ainda a particularidade de poderem existir arcos onde a energia é recuperada em vez de gasta.

Foram apresentados alguns resultados computacionais que nos permitem concluir essencialmente que a utilização de abordagens baseadas em desigualdades válidas para o TSP não é suficiente para resolver o ETSP e mais terá de ser feito como trabalho futuro.

Assim, pretendemos futuramente estudar o sistema de fluxo de energia e encontrar desigualdades válidas para o mesmo e, além disso, considerar outros modelos em que se procede à discretização do nível da carga e/ou da energia.

Pretendemos também incorporar outros aspectos práticos importantes tais como a adição de estações de recarga, para possibilitar a recarga da bateria a meio da rota. Além disso, temos intenção de estender o trabalho realizado ao problema mais geral de *Electric Vehicle Routing Problem* em que se permite mais do que um veículo eléctrico para servir os clientes.

REFERÊNCIAS

- [1] Lawler, E., Lenstra, J., Rinnooy, A., Shmoys, D. (1985). *The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization*. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons. ISBN: 978-0471904137.
- [2] Gutin, G., Punnen, A. (2002). *The traveling salesman problem and its variations*. Combinatorial Optimization, Springer. ISBN: 978-0387444599.
- [3] Schneider, M., Stenger, A., Goeke, D. (2014). *The electric vehicle routing problem with time windows and recharging stations*. Transportation Science, vol. 48, pages 1-21.
- [4] Bruglieri, M., Pezzella, F., Pisacane, O., Suraci, S. (2015). *Variable neighborhood search branching for the electric vehicle routing problem with time windows*. Electronic Notes in Discrete Mathematics, vol. 47, pages 221-228.
- [5] Santos, D. (2015). *A study of flow-based models for the electric vehicle routing problem*. Master Thesis, Universidade de Lisboa, Lisboa.

